0002096183097999

愛知県立大学

2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $a>1$, $b>0$, $c>0$, $f(t)=a^{-bt}$ とする．点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として $x=f(t)\cos t$, $y=f(t)\sin t$ のように表されるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を t について微分せよ．

(2) $t=0$ から $t=c$ までの間に点Pが動く道のり l を a, b, c で表せ．

(3) (2)の l について，$L=\lim\limits_{c\to\infty} l$ を a, b で表せ．

(4) $t=0$ から $t=d$ までの間に点Pが動く道のりが，(3)で求めた L の $\frac{1}{2}$ であるとする．$a=2$, $b=5$ であるとき d を求めよ．

(1) $f'(t)=-b\cdot a^{-bt}\cdot\log a=\underline{-a^{-bt}\cdot b\log a}$ //

(2) $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)\cos t-f(t)\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)\sin t+f(t)\cos t$

$$\therefore l=\int_0^c\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^c\sqrt{\{f'(t)\cos t-f(t)\sin t\}^2+\{f'(t)\sin t+f(t)\cos t\}^2}\,dt$$

$$=\int_0^c\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{f(t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_0^c\sqrt{(-a^{-bt}\cdot b\cdot\log a)^2+(a^{-bt})^2}\,dt$$

$a^{-bt}>0$ より.

$$=\sqrt{1+b^2(\log a)^2}\int_0^c a^{-bt}\,dt$$

$$=\sqrt{1+b^2(\log a)^2}\left[-\frac{1}{b\log a}\cdot a^{-bt}\right]_0^c$$

$$=\underline{\frac{1-a^{-bc}}{b\log a}\sqrt{1+b^2(\log a)^2}}\ //$$

(3) $a>1$, $b>0$ より，$c\to\infty$ のとき，$a^{-bc}\to 0$ $\quad\therefore\ \underline{L=\dfrac{\sqrt{1+b^2(\log a)^2}}{b\log a}}$ //

(4) $a=2$, $b=5$ のとき，$L=\dfrac{\sqrt{1+25(\log 2)^2}}{5\log 2}$

$$\therefore\ \underbrace{\frac{1-2^{-5d}}{5\log 2}\cdot\sqrt{1+25(\log 2)^2}}_{}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+25(\log 2)^2}}{5\log 2}\iff 1-2^{-5d}=\frac{1}{2}$$

(2)の結果に，$a=2$, $b=5$, $c=d$ を代入

$$\iff 2^{-5d}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \underline{d=\frac{1}{5}}\ //$$