愛知県立大学

2015年 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標空間において，3点O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(2, 1, 1)の定める平面をαとし，3点(0, 0, 0)，(0, 1, 1)，(1, 0, 1)の定める平面をβとする．また，平面αと平面βが交わってできる直線をℓとし，平面α上の点Pの座標を(2, −1, 3)とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(2) 直線ℓ上の点を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$と実数kを用いて表せ．

(3) 点Pから直線ℓに垂線を下ろす．このとき，直線ℓと垂線との交点の座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$(2, -1, 3) = (s+2t,\ s+t,\ t)$

各成分を比較すると，$t=3,\ s=-4$　　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP} = -4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}$ //

(2) ℓ上の点をQとおくと，Qは平面α上の点より，

$\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ と表せる．

一方，Qは平面β上の点でもあるから

$\overrightarrow{OQ} = z(0,1,1) + w(1,0,1)$ と表せる

よって，$(x+2y,\ x+y,\ y) = (w,\ z,\ z+w)$

$$\begin{cases} x+2y = w & \cdots ① \\ x+y = z & \cdots ② \\ y = z+w & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②を③に代入して，w, zを消去すると，$2x+3y=y$　　$\therefore\ x=-y$

$\therefore\ y=-x=-w$，$z=0$ とすると ①〜③ はすべて成り立つ

さらに，$x=k$ とするとき．$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \ell$上の点は $\underline{k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})}$ // と表せる．

平面α, βがともに原点を通っているから．

(3) 交点をQとおくと，$PQ \perp \ell$ であり ℓは原点を通る直線であるから

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OQ}$　よって $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$

$$\therefore\ \{k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) - (-4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})\}\cdot k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) = \{(k+4)\overrightarrow{OA} - (k+3)\overrightarrow{OB}\}\cdot k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

$$= k\{(k+4)|\overrightarrow{OA}|^2 - (2k+7)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + (k+3)|\overrightarrow{OB}|^2\}$$

$\cdots(*)$

2015年 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標空間において，3点O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(2, 1, 1)の定める平面をαとし，3点(0, 0, 0)，(0, 1, 1)，(1, 0, 1)の定める平面をβとする．また，平面αと平面βが交わってできる直線をℓとし，平面α上の点Pの座標を(2, −1, 3)とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(2) 直線ℓ上の点を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$と実数kを用いて表せ．

(3) 点Pから直線ℓに垂線を下ろす．このとき，直線ℓと垂線との交点の座標を求めよ．

(3)のつづき．

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2}$，$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2+1 = 3$ より

$(*) = k\{2(k+4) - 3(2k+7) + 6(k+3)\}$

$= k(2k+5)$

$Q \neq O$ より $k \neq 0$　$\therefore k = -\frac{5}{2}$

このとき．$\overrightarrow{OQ} = -\frac{5}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$

$= \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ 交点は $\underline{\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)}$ //