0001860729318999

島根大学

2014年 教育・生物資源科学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 最初の持ち点を1点として，n回硬貨を投げ，投げるたびに，表が出ると持ち点は$\frac{7}{4}$倍に，裏が出ると持ち点は$\frac{1}{2}$倍になるゲームを考える．たとえば，$n=2$で表，裏の順に出れば，持ち点は$1\times\frac{7}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$点となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n=2$のとき，ゲームが終わったあとの持ち点のとりうる値をすべて求めよ．

(2) $n=4$のとき，ゲームが終わったあとの持ち点が1点以下になる確率を求めよ．

(3) $n=k$のとき，ゲームが終わったあとの持ち点の期待値をkを用いて表せ．

(1) 表・表 $\to 1\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{49}{16}$　表，裏 $\to \frac{7}{8}$　裏・表 $\to \frac{7}{8}$

裏・裏 $\to 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　$\therefore$ とりうる値は，$\underline{\frac{49}{16},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{4}}$ //

(2) 表が3回出ると．$1\times\left(\frac{7}{4}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{343}{128}>1$

〃 2回 〃　$1\times\left(\frac{7}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{64}<1$

$\therefore$ (i) 表が2回出る確率は．$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_4C_2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

(ii) 〃 1回 〃　$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot{}_4C_1=\frac{4}{16}=\frac{2}{8}$

(iii) 〃 0回 〃　$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(i)～(iii)より．$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{16}=\underline{\frac{11}{16}}$ //

(3) k回のうちm回表，$k-m$回裏が出ると，得点は，$(0\leqq m\leqq k)$

$1\times\left(\frac{7}{4}\right)^m\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}=\left(\frac{7}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}$ 点となる．

また，この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}\cdot{}_kC_m=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot{}_kC_m$

$\therefore$ (期待値) $=\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{7}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot{}_kC_m$

$=\cancel{\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{7}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\cdot\frac{k!}{m!(k-m+1)!}}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{m=0}^{k}{}_kC_m\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}$

二項定理

$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left\{\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\right\}^k$

$=\left(\frac{9}{4}\right)^k\times\frac{1}{2^k}$　まちがえた！　$=\underline{\left(\frac{9}{8}\right)^k}$ //

$=\cancel{\frac{9}{2^{k+2}}}$ //