



2014年工学部第5問

5 不等式

$$\log_x y < 2 + 3 \log_y x$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ.

真数条件より, $x > 0, y > 0$ 底の条件より, $x \neq 1, y \neq 1$ このとき, 底の変換公式より, $\log_x y < 2 + 3 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y}$

よって, $\log_x y < 2 + \frac{3}{\log_x y} \dots \textcircled{1}$

(i) $0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ のとき $\log_x y > 0$ であるから, $\textcircled{1}$ より,

$$(\log_x y)^2 - 2 \log_x y - 3 < 0$$

$$\therefore (\log_x y - 3)(\log_x y + 1) < 0$$

$$\therefore \log_x y - 3 < 0$$

$$\therefore y > x^3$$

(ii) $0 < x < 1$ かつ $y > 1$ のとき. $\log_x y < 0$ であるから, $\textcircled{1}$ より

$$(\log_x y)^2 - 2 \log_x y - 3 > 0$$

$$\therefore (\log_x y - 3)(\log_x y + 1) > 0$$

$$\therefore \log_x y + 1 < 0$$

$$\therefore y > \frac{1}{x}$$

(iii) $x > 1$ かつ $0 < y < 1$ のとき $\log_x y < 0$ であるから $\textcircled{1}$ より

$$(\log_x y)^2 - 2 \log_x y - 3 > 0$$

(ii)と同様にして,

$$\log_x y + 1 < 0$$

$$\therefore y < \frac{1}{x}$$

(iv) $x > 1$ かつ $y > 1$ のとき $\log_x y > 0$ であるから, $\textcircled{1}$ より,

$$(\log_x y)^2 - 2 \log_x y - 3 < 0$$

(i)と同様にして,

$$\log_x y - 3 < 0$$

$$\therefore y < x^3$$

(i)~(iv)より.

求める領域は右図の斜線部分

ただし, 境界線は含まない.

