0001823726718999

宮崎大学

2014 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ t を定数とする 2 次方程式 $z^2 - tz + t - \dfrac{1}{2} = 0$ について，次の各問に答えよ．ただし，定数 t は実数とする．

$= f(z)$ とおいた

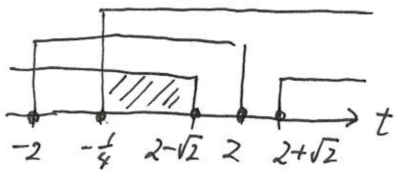
(1) この 2 次方程式が実数解をもち，すべての解が -1 以上 1 以下であるような定数 t の値の範囲を求めよ．

(2) この 2 次方程式が 2 つの共役な虚数解 $z = x \pm yi$（x，y は実数，i は虚数単位）をもち，$x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たすような定数 t の値の範囲を求めよ．

(1) 判別式を D とすると，実数解をもつことより

$$D = t^2 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)$$
$$= t^2 - 4t + 2$$
$$\therefore\ t^2 - 4t + 2 \geqq 0$$
$$\therefore\ t \leqq 2 - \sqrt{2},\ t \geqq 2 + \sqrt{2} \ —①$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$



$-1 \leqq$(軸)$\leqq 1$ より．$-1 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq 1 \quad \therefore\ -2 \leqq t \leqq 2$ —②

$f(-1) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ なので，$2t + \dfrac{1}{2} \geqq 0 \Leftrightarrow \therefore\ t \geqq -\dfrac{1}{4}$ —③

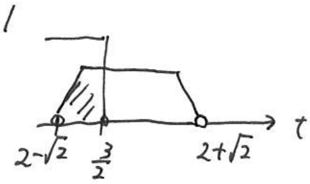
①，②，③ より．$-\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq 2 - \sqrt{2}$

(2) $D < 0$ より $2 - \sqrt{2} < t < 2 + \sqrt{2}$ —④

このとき解は $z = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t + 2}}{2} = \dfrac{t \pm \sqrt{-t^2 + 4t - 2}\, i}{2}$

$\therefore\ x = \dfrac{t}{2},\ y = \dfrac{\sqrt{-t^2 + 4t - 2}}{2} \quad \therefore\ \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{-t^2 + 4t - 2}{4} \leqq 1$

$\therefore\ t - \dfrac{1}{2} \leqq 1 \quad \therefore\ t \leqq \dfrac{3}{2}$ —⑤



$\therefore\ 2 - \sqrt{2} < t \leqq \dfrac{3}{2}$