

2015年 医学部 第2問

 数理  
石井K

2  $\log_2 a + \log_2 b = 1$ ,  $\log_c a + \log_c b = 3$  ( $a, b, c$ は正の実数,  $c \neq 1$ ) がともに成立しているとき,  $2\log_c(a+b)$ の最小値を求めよ.

$$\log_2 a + \log_2 b = 1 \text{ より } \log_2 ab = 1 \quad \therefore ab = 2 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_c a + \log_c b = 3 \text{ より } \log_c ab = 3 \quad \therefore ab = c^3 \dots \textcircled{2}$$

①と相加・相乗平均の関係より,  $a > 0, b > 0$ なので

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

が成り立つ

$$\text{また } c > 0 \text{ と } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } c^3 = 2 \quad \therefore c = \sqrt[3]{2}$$

$$\therefore 2\log_c(a+b) = 2\log_{\sqrt[3]{2}}(a+b)$$

$$\geq 2\log_{\sqrt[3]{2}} 2\sqrt{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 \sqrt[3]{2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \underline{\underline{9}}$$