

2012年 歯・薬学部 (前期) 第3問

3 4次方程式 $x^4 - (a+2)x^3 + (3a+2)x^2 - 4ax + 2a = 0$ が $1+i$ を解にもち、その他の解のうち2つは同じ値 (重解) であった。このとき実数 a の値を求めなさい。

$$P(x) = x^4 - (a+2)x^3 + (3a+2)x^2 - 4ax + 2a \text{ とおく、}$$

$$P(x) = 0 \text{ は実数係数の方程式より、} 1-i \text{ を解にもつ}$$

実数係数の方程式は、
共役な複素数を解にもつ。

$$\therefore P(x) = \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} (x - \alpha)^2 \text{ と因数分解される } (\alpha \text{ は実数})$$

$$\therefore P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$$

$$= x^4 - (2\alpha + 2)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha + 2)x^2 - (2\alpha^2 + 4\alpha)x + 2\alpha^2$$

\therefore 各係数を比較して、

$$\begin{cases} 2\alpha = a & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2 + 4\alpha = 3a & \cdots \textcircled{2} \\ 2\alpha^2 + 4\alpha = 4a & \cdots \textcircled{3} \\ 2\alpha^2 = 2a & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ より、 α を消去して、

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = 2a \quad \therefore a(\alpha - 4) = 0 \quad \therefore a = 0, 4$$

(i) $a = 0$ のとき

$$\alpha = 0 \text{ となり、} \textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ は成り立つ}$$

(ii) $a = 4$ のとき

$$\alpha = 2 \text{ となり、} \textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ は成り立つ}$$

(i), (ii) より、

$$\underline{a = 0, 4}$$