愛知学院大学

2013年 歯・薬学部（中期） 第2問

2 曲線 $C: y = x^3 - tx$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3 - ta)$ $(a < 0)$ における接線 ℓ が C と交わる点を Q とする.

(1) 点Qの x 座標を a を用いて表すと $x = \boxed{アイ}\,a$ である. −2

(2) 点Qにおける C の接線が直線PQと直交するとき $(\boxed{ウ}\,a^2 - t)(\boxed{エオ}\,a^2 - t) = -1$ である. 3　12

(3) (2)を満たす a の値がただ1つ決まるとき, $t = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である. 4　3

(1) $y' = 3x^2 - t$

$\therefore\ \ell : y = (3a^2 - t)(x - a) + a^3 - ta$

$\therefore\ \ell : y = (3a^2 - t)x - 2a^3$

$\therefore\ x^3 - tx - \{(3a^2 - t)x - 2a^3\} = 0$ を解く

$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$

$\therefore\ (x - a)^2(x + 2a) = 0$

$\therefore\ x = a$ (重解), $-2a$

$\therefore$ Qの x 座標は $\underline{-2a}$ //

(2) 点Qにおける接線の傾きは, $y' = 3x^2 - t$ に代入して, $12a^2 - t$

PQの傾きは, $\dfrac{a^3 - ta - \{(-2a)^3 - t\cdot(-2a)\}}{a - (-2a)} = \dfrac{9a^3 - 3ta}{3a} = 3a^2 - t$

$\therefore\ \underline{(3a^2 - t)(12a^2 - t) = -1}$ //

(3) (2)より, $36a^4 - 15ta^2 + t^2 + 1 = 0$

ここで, $f(a) = 36a^4 - 15ta^2 + t^2 + 1$ とおくと,

$f'(a) = 144a^3 - 30ta$

$\quad = 6a(24a^2 - 5t)$

(i) $t \leqq 0$ のとき.

a	$(-\infty)$	$\cdots$	(0)
$f'(a)$		$-$	
$f(a)$		$\searrow$	

$f(0) = t^2 + 1 > 0$ より (2)をみたす

a は 0個.

(ii) $t > 0$

$f'(a) = 0$ となるのは, $a = 0,\ \pm\dfrac{\sqrt{30t}}{12}$

右の増減表より

a	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{30t}}{12}$	$\cdots$	(0)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f\left(-\dfrac{\sqrt{30t}}{12}\right) = 36\cdot\left(\dfrac{5t}{24}\right)^2 - 15t\cdot\dfrac{5t}{24} + t^2 + 1 = 0$

$\therefore\ t^2 = \dfrac{16}{9}$　　$t > 0$ より $t = \dfrac{4}{3}$

(i), (ii) より $\underline{t = \dfrac{4}{3}}$ //