2013年 歯・薬学部（前期）第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 円 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ と，直線 $y=\frac{1}{2}x$ の2つの交点と円上の任意の点によりできる三角形の重心の軌跡を求めなさい．

$(x-3)^2+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2=9$

展開して整理すると，

$5x^2-36x+36=0$

$\therefore (5x-6)(x-6)=0$

$\therefore x=\frac{6}{5}, 6$

$\therefore$ 2つの交点は $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right), (6, 3)$

円上の任意の点は $P(3+3\cos\theta, 3+3\sin\theta)$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表せるので

重心を $G(X, Y)$ とおくと，

$X=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}+6+3+3\cos\theta\right)$　　$\therefore X=\frac{17}{5}+\cos\theta$ …①

$Y=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}+3+3+3\sin\theta\right)$　　$\therefore Y=\frac{11}{5}+\sin\theta$ …②

ただし，$P=\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right), (6, 3)$ となるときは三角形がつくれないので

$(3+3\cos\theta, 3+3\sin\theta) \neq \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right), (6, 3)$

よって $(\cos\theta, \sin\theta) \neq \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), (1, 0)$

①，②より，$(X, Y) \neq \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right), \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ …③

①，②と $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，

$\left(X-\frac{17}{5}\right)^2+\left(Y-\frac{11}{5}\right)^2=1$ …④

③，④より，求める軌跡は，

中心 $\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$，半径1の円　ただし，$\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)$ と $\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ は除く //