2013年 薬学部（前期） 第2問

$\boxed{2}$ 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と，傾きが a で点 $(1,\ 1)$ を通る直線がある．このとき放物線と直線に囲まれた図形の面積 S の最小値を求めなさい．

直線：$y=a(x-1)+1 \quad \therefore y=ax-a+1$

$\therefore \frac{1}{2}x^2-(ax-a+1)=0 \iff x^2-2ax+2a-2=0 \cdots ①$

①の判別式を D とすると，$D/4=a^2-(2a-2)=(a-1)^2+1>0$

∴ 放物線と直線は異なる2点で交わる．

交点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

①において，解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=2a, \quad \alpha\beta=2a-2$

$$\begin{aligned}\therefore (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= 4a^2-4(2a-2) \\ &= 4(a^2-2a+2)\end{aligned}$$

$\beta>\alpha$ より，$\beta-\alpha>0$ なので，$\beta-\alpha=2\sqrt{a^2-2a+2} \cdots ②$

$$\begin{aligned}\therefore S &= \int_\alpha^\beta ax-a+1-\frac{1}{2}x^2\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12}\left(2\sqrt{a^2-2a+2}\right)^3 \quad (\because ②より) \\ &= \frac{2}{3}\left\{(a-1)^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$\frac{1}{6}$公式

$\therefore a=1$ のとき．S は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる．